ŘEŠENÍ

Cvičení 1. (a) Připomeňme, jak vypadá sdružené rozdělení (X,Y) a marginální rozdělení X a Y.

X \ Y	0	1	2	$\sum$
0	0	0	1/8	1/8
1	0	1/4	1/8	3/8
2	1/8	1/4	0	3/8
3	1/8	0	0	1/8
$\sum$	1/4	1/2	1/4	1

Z tabulky dostaneme $\mathbb{E}XY = 1, \mathbb{E}X = \frac{3}{2}, \mathbb{E}Y = 1$, a tedy $\text{cov}(X,Y) = \mathbb{E}XY - \mathbb{E}X\mathbb{E}Y = -\frac{1}{2}$.

(b) Z tabulky máme $\text{var}(X) = \frac{3}{4}, \text{var}(Y) = \frac{1}{2}$, a tedy $\text{corr}(X,Y) = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

Poznámka Alternativně jsme mohli určit hodnoty $\mathbb{E}X, \mathbb{E}Y, \text{var}X, \text{var}Y$ jako momenty binomického rozdělení neboť $X \sim Bi(3, \frac{1}{2}), Y \in Bi(2, \frac{1}{2})$.

Cvičení 2. (a) Připomeňme, jak vypadá sdružené rozdělení (X,Y) a marginální rozdělení X a Y.

X \ Y	0	1	2	$\sum$
0	0	1/10	1/10	1/5
1	1/10	2/5	1/10	3/5
2	1/10	1/10	0	1/5
$\sum$	1/5	3/5	1/5	1

Z tabulky dostaneme $\mathbb{E}XY = \frac{4}{5}, \mathbb{E}X = 1, \mathbb{E}Y = 1$, a tedy $\text{cov}(X,Y) = \mathbb{E}XY - \mathbb{E}X\mathbb{E}Y = -\frac{1}{5}$.

(b) Z tabulky máme $\text{var}(X) = \frac{2}{5}, \text{var}(Y) = \frac{2}{5}$, a tedy $\text{corr}(X,Y) = -\frac{1}{2}$.

Cvičení 3. (a) $c = 4$

(b)

$$\mathbb{E}XY = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = ... = \frac{4}{9}$$

K určení $\mathbb{E}X, \mathbb{E}Y$ potřebujeme marginální hustoty. Z definice dostaneme

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\mathrm{d}y = \begin{cases} \int_0^1 4xy\mathrm{d}y = 2x & \text{pro } 0 < x < 1, \\ 0, & \text{jinak,} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\mathrm{d}x = \begin{cases} \int_0^1 4xy\mathrm{d}x = 2y & \text{pro } 0 < y < 1, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

A tedy $\mathbb{E}X = \frac{2}{3}, \mathbb{E}Y\frac{2}{3}$ a $\text{cov}(X,Y) = 0$.

(c) X a Y jsou nezávislé, neboť $f(x,y) = 4xy = 2x \cdot 2y = f_X(x) \cdot f_Y(y)$ dokonce pro všechna $(x,y) \in [0,1]^2$.

(d)

$$\text{Var}(X,Y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{18} & 0 \\ 0 & \frac{1}{18}. \end{pmatrix}$$

Cvičení 4. $\text{cov}(X,Y) = \text{corr}(X,Y) = 0$, náhodné veličiny X a Y ale nejsou nezávislé.

Cvičení 5. (a) $c = \frac{1}{\pi}$

(b)$\mathbb{E}X = \mathbb{E}Y = 0, \mathbb{E}XY = 0$, a tedy $\text{cov}(X,Y)\text{corr}(X,Y) = 0$.

(c) Náhodné veličiny nejsou nezávislé, neboť

$$f(x,y) = \frac{1}{\pi} \neq \frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2} \cdot \frac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2} = f_X(x) \cdot f_Y(y)$$

pro $(x,y) \in B$ takovou, že $\mathbb{P}((X,Y) \in B) > 0$.

Cvičení 6. $X \sim Hypergeom(100, a, 5)$. Položme

$$X = \sum_{i=1}^{5} Y_i,$$

kde $Y_i = \mathbf{1}\{\text{v i-tém tahu jsme vylovili zlatou rubku}\}$. Pak $Y_1, ..., Y_5$ jsou závislé 0-1 náhodné veličiny. Odvodíme rozdělení Y_i. Pro $i = 1$ je

$$\mathbb{P}(Y_1 = 1) = \frac{a}{100}, \mathbb{P}(Y_1 = 0) = 1 - \frac{a}{100}.$$

Pro $i = 2$ použijeme větu o úplné pravděpodobnosti

$$\mathbb{P}(Y_2 = 1) = \mathbb{P}(Y_2 = 1|Y_1 = 0)\mathbb{P}(Y_1 = 0) + \mathbb{P}(Y_2 = 1|Y_1 = 1)\mathbb{P}(Y_1 = 1) = ... = \frac{a}{100}, \mathbb{P}(Y_2 = 0) = 1 - \frac{a}{100}.$$

Podobně pro $i = 3, 4, 5$ získáme podmíněním na všechny různé kombinace $Y_1, .., Y_{i-1}$ a dostaneme

$$\mathbb{P}(Y_i = 1) = \frac{a}{100}, \mathbb{P}(Y_i = 0) = 1 - \frac{a}{100}.$$

Tedy

$$\mathbb{E}X = \mathbb{E}\sum_{i=1}^{5} Y_i = \sum_{i=1}^{5} \mathbb{E}Y_i = 5\mathbb{E}Y_1 = \frac{a}{20}.$$